早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

(英文タイトル)
Quantum invariants and geometric structure of 3-manifolds

(和文タイトル)
量子不変量と３次元多様体の幾何構造

申　　請　　者

（日本語氏名）
大貫　　　浩二
（英語氏名）
Koji　　Ohnuki

数理科学専攻　トポロジー研究

２００５年　１２月

本論文では結び目や絡み目の量子不変量と多様体の幾何学的な構造や不変量との関係を論じる. これまで 3 次元球面内の結び目を区別する道具として, 様々な不変量が研究されてきた. 特に 1985 年の Jones 多項式の発見以降, 近年では量子群の表現から構成される不変量 (量子不変量と呼ばれる) が活発に研究されてきている. しかし、量子不変量の幾何学的な解釈については依然として明確なことはわかっておらず、この関係を調べることは重要な課題である.

本論文では主に量子群 $U_q(sl_2)$ の N 次元既約表現を使って得られる量子不変量 colored Jones 多項式について考える. それは次のようにして計算される. まず結び目 K を適当に 1 点で切って得られるタングルを考える. このタングルの全ての辺にラベルと呼ばれる変数 $i_m \in \{0, \ldots, N-1\}$ を割り振る. 特に端点を含む辺には 0 を割り振る. このラベル付きのタングルに以下のような対応で数を対応させる. 4 つのラベル i, j, k, l を伴った正の交点に数 R^{ij}_{kl}, 負の交点に数 $(R^{-1})^{ij}_{kl}$ を割り当て, 極大点と極小点を含むラベル i の辺に対しても i に対応する数を割り当てる. こうしてラベルつきのタングルの交点, 極大点, 極小点から得られる数全ての積を取り, 全てのラベルについて 0 から $N-1$ まで和を取ることで結び目に数を対応させることができる. さらに R^{ij}_{kl} などの対応させた数をうまく取ることによって, この数を結び目の不変量にすることができる. ここで R として, $U_q(sl_2)$ の N 次元既約表現から得られる R 行列の成分を使うことで結び目 K の N-colored Jones 多項式 $J_N(K;q)$ が定義される. 特に $N=2$ のときが Jones 多項式に等しい.

この colored Jones 多項式に関して以下のような体積予想と呼ばれる予想が提唱された.

Conjecture 1 (体積予想) K を結び目, $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ としたとき,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log|J_N(K;q)|}{N} = \frac{1}{2\pi} v_3 ||K||$$

ここで, $||K||$ は $S^3 - K$ の単体体積, v_3 は理想正四面体の体積とする.

この予想は 1995 年に R. Kashaev が発見した R 行列から得られる不変量を使って出された. 後に村上順-村上斉によって Kashaev 不変量と colored Jones 多項式の特殊値は等しいことが示され, 上の形で再定式化された. 体積予想は量子不変量と体積という幾何学的な量との対応関係を示しているため注目されている予想である.

現在, いくつかの場合についてこの予想が正しいことが示されている. ひとつは 8 の字結び目で, これは Ekholm によって初等的な方法で証明された. 1999 年の論文で, R. Kashaev と O. Tirkkonen はトーラス結び目と呼ばれる結び目の族 (これは補空間に双曲幾何構造が入らない結び目) に対して, $\dfrac{\log|J_N(K;q)|}{N}$ の極限が 0 になることを示した. さらに T.T.Q.Le により Borromean 環と呼ばれる絡み目に対しても予想が成り立つことを示す. 一方、横田佳之は Kashaev の R 行列に対応する補空間の四面体分割を構成し, Kashaev 不変量の幾何構造からの解釈を行う.

本論文は 3 つの章から成る.

第 1 章では, 結び目の量子不変量の構成と体積予想に関する背景とこれまでの発展について述べる.

第 2 章では, 2 橋絡み目と呼ばれる絡み目の族を例にとって, colored Jones 多項式と 2 橋絡み目 L の補空間の理想四面体分割から与えられる幾何構造との関係を述べる.

W. P. Thurston などにより, 結び目の補空間の理想四面体による分割から補空間の幾何構造を調べる方法が得られている. ここで, 理想四面体とは双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の四面体で頂点が無限遠球面上にある四面体のことである. 3 次元双曲空間のモデルである上半空間 $\{(z,h)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\,|\,h>0\}$ において, 理想四面体は頂点を $(0,0)$, $(1,0)$, $(z,0)$, ∞ に置くことで複素数 z でパラメトライズできる. とくに四面体の面角は z, $1-\frac{1}{z}$, $\frac{1}{1-z}$ の偏角になる. 以下の方法で結び目の補空間の幾何構造を代数方程式で書き下すことができる. まず結び目の理想四面体分割を構成し, 各々の四面体を複素変数で表す. 各四面体が貼り合わさるための条件は辺の周りの面角の和が 2π であることである. これは対応する複素変数の積が 1 であることと同値であり, 辺の数だけの代数方程式が得られる. 次に結び目の補空間が完備である条件を考える. その条件は, 結び目の近傍の境界であるトーラス $S^1\times S^1$ がユークリッド的であることで, この条件も四面体のパラメータを使って代数方程式で記述することができる. こうして得られた代数方程式を解くことで完備性をもった双曲幾何構造が唯一つ定まる. さらにこの方法で決まる理想四面体の体積の和として結び目の補空間の双曲体積を計算することができる.

さて, D. P. Thurston と横田に従って, 以下のように 2 橋絡み目 L の補空間の理想四面体分割を与える. 最初に各交点に八面体を置く. ここで, 各八面体は 5 つの四面体から構成されているものとし, 八面体の 2 つの頂点は結び目の上交差点と下交差点にそれぞれ接するようにする. 次に八面体の 4 つの辺を 2 つずつ同一視することで, 結び目に接していない 4 つの頂点を 2 つずつ同一視する. こうして得られる変形した八面体を結び目に沿って向かい合うもの同士を互いに貼り合わせることで 3 次元球面から結び目とさらに 2 つの点 $\{\pm\infty\}$ を除いた空間 $S^3-(L\cup\{\pm\infty\})$ の分割が得られる. さらに 2 つの点 $\pm\infty$ と結び目の近傍に交わる面の近傍を取り除くことによって結び目の補空間の四面体分割が得られる. これは上記の colored Jones 多項式の計算における R 行列の役割におおよそ対応する. この分割が双曲幾何構造を与えるための条件となる代数方程式を具体的に記述する. ここで得られた幾何構造方程式は作間誠と J. Weeks によって与えられた 2 橋絡み目の標準的分解から得られる幾何構造方程式と一致することがわかる. しかし, 2 つの分割は面の貼り合わせ方法から一般に異なることがわかる.

次に 2 橋絡み目の colored Jones 多項式を上記の方法で計算する. Kashaev の論文内では, $q-$整数の和で書かれた多項式を多重積分で表示し, 鞍点法によって極限を評価する方法を用いて, 彼の予想を 3 つの結び目について確かめている. しかし, この多重積分への鞍点法の適用は数学的な厳密さがなく, 現在, 体積予想の解決において, この方法の正当化が最大の問題となっている. さて, 2 橋絡み目の colored Jones 多項式に対して, 関数 $V(z_2,\ldots,z_m,w)$ を対応させる. この関数は Kashaev の方法で極限を評価する過程で表れる関数で, この関数の極値の一つが極限を与えることが期待されている. 特に各パラメータは colored Jones 多項式を計算した際に用いたタングルのラベルに対応する. こうして得られる数値が本当の極限であるかどうかわからないが, ここで得られ

た関数の極値を求める方程式が上記の双曲幾何構造を与える方程式に一致し, 特にその極値が体積に等しいことを本論文で示す. 以上をまとめると

Theorem 1 *2 橋絡み目 L に対して, colored Jones 多項式から得られる方程式の族*

$$\exp\left(z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big|_{w=\infty}\right)=1 \quad (i=2,\dots m)$$

は結び目の補空間の双曲幾何構造方程式と一致する. 特にこの幾何構造方程式は作間-Weeks によって与えられた標準的分解の幾何構造方程式とも一致する.
この方程式の解 $(\zeta_2,\dots\zeta_m)$ で全ての ζ_i の虚部が正とすると,

$$\mathrm{Im}V(\zeta_2,\dots,\zeta_m,\infty)=\mathrm{Vol}(S^3-L).$$

ここで w という余分なパラメータが入っていることがわかる. Kashaev 不変量の場合はこのようなパラメータが入らず, きれいに一致することを横田の定理は示している. この余分なパラメータは colored Jones 多項式の計算の際に用いたタングルの取り方によるもので, タングルの取り方によっては余分なパラメータが q-整数の和に関する公式によって解消されることがある. また, colored Jones 多項式を上記の方法ではなく, スケイン理論を用いて計算するとかなりの数のパラメータが減ることが多い. しかし, スケイン理論を用いた場合の多項式について, 上のような幾何構造との関係は統一的には得られていない.

第 3 章では一般化された体積予想に関して述べる. 体積予想では colored Jones 多項式を $\exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ で展開したものの極限を考えたが, 近年では $\exp(2\pi\alpha\sqrt{-1}/N)$ で展開したものの極限が考えられるようになった. これは α というパラメータで変形する余地があり, この α の変動が, 結び目 K の補空間の幾何構造の変形に対応すると期待されている. 特に $\dfrac{\log J_N(K;\exp(2\pi\alpha\sqrt{-1}/N))}{N}$ の極限が K に沿った Dehn 手術で得られる多様体の体積を決めるだろうということが期待されている. この予想に関して, 8 の字結び目の場合が解析されている. 8 の字結び目のとき, 村上斉は α が実数の場合には錘多様体の体積が表れることを示し, 村上-横田によって一般の複素数で絶対値が 1 に近い場合は, 8 の字結び目の変形空間に定義域を持ち、多様体の体積と Chern-Simons 不変量などを含む Neumann-Zagier 関数が表れることが示された.

本論では 3 成分の絡み目である Borromean 環 B についてこの解析を行い, 以下の結果を証明する.

Theorem 2 *r を非有理数の実数とし, $\frac{1}{2}<r_2<r<1+r_1<\frac{3}{2}$ とする. このとき,*

$$2\pi r\lim_{N\to\infty}\frac{\log\left|J_N(B;\exp(2\pi r\sqrt{-1}/N))\right|}{N}=\mathrm{Vol}(B(2\pi|1-r|,2\pi|1-r|,2\pi|1-r|)).$$

r_1,r_2 は定数で, 右辺は特異集合がボロミアン環で錐角がすべて $2\pi|1-r|$ の錐多様体の双曲体積を表す.

研究業績

種類別	題名,　　発表・発行掲載誌名,　　発表・発行年月,　　連名者（申請者含む）
論文 [1]	*The asymototic behaviors of the colored Jones polynomial of the Borromean rings*, preprint (投稿中), 2005.
論文 [2]	*The colored Jones polynomial of 2-bridge link and hyperbolicity equation of it's complements*, J. Knot Theory Ramifications **14** no. 6, 751–773, 2005.
発表 [1]	On the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial, Second East Asian School of Knots and Related Topics in Geometric Topology, Dalian University of Technology, 2005/8/2–5.
発表 [2]	The asymptotic behavior of the colored Jones polynomial, 日本数学会 2005 年度年会 日本大学, 2005/3/27–30.
発表 [3]	On the volume conjecture for the Whitehead link and the Borromean rings, A多項式 Summer Seminar, 東京工業大学, 2004/8/6–7.
発表 [4]	Link invariant as critical values of the dilogarithm functions, Workshop on hyperbolic volumes, Waseda University, 2003/12/9–11.
発表 [5]	The ideal triangulation related to the colored Jones polynomial, Workshop on the hyperbolic volume conjecture, University of Geneva, 2003/9/8–14.
発表 [6]	2 橋絡み目の colored Jones 多項式と幾何構造, 日本数学会 2003 年度年会, 東京大学, 2003/3/23–26.
発表 [7]	2 橋絡み目の colored Jones 多項式と補空間の幾何構造, 研究集会『結び目のトポロジーV』, 早稲田大学, 2002/12/16–19.
発表 [8]	Colored Jones 多項式と Reshetikhin-Turaev 不変量の optimistic limit, 研究集会『トポロジーとコンピュータ』, 奈良女子大学, 2002/11/28–30.
発表 [9]	Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の optimistic limit, 日本数学会 2002 年度秋季総合分科会, 島根大学, 2002/9/25–28.